3.2.- Paradojas, falacias y falsos argumentos.

3.2.1.- Pensamiento escéptico y falacias lógicas

Pese a que consideramos que pensamos de forma independiente y autónoma, ello no es cierto. La mayor parte de nuestros argumentos dependen de otros. Aprender a pensar por uno mismo supone que no se debe creer ni aceptar ciegamente lo que le digan los demás. Pero aprender a pensar críticamente, supone que ni siquiera aceptamos porque si lo que pregonen los "expertos" o los "gurús", sin verificar las cosas por uno mismo. No se trata de **comprobar** todas las cosas, pero sí de investigarlas, hasta estar razonablemente seguros de su validez o falsedad. El espíritu crítico está reñido con el dogma. Por eso la ciencia, la Filosofía y el pensamiento en general se revelan contra el dogma. En el razonamiento auténtico, no hay certezas absolutas. La física aristotélica fue desplazada por la newtoniana, ésta lo fue por la einsteniana y, próximamente, esta última también se quedará atrás. Ni Aristóteles, ni Newton, ni Einstein, ni Hawking, ni nadie, tiene la verdad última. Por ello, pensar, investigar, es en gran medida ser un esceptico, precisamente de ese es el siguignificado originario de la palabra "esceptico": que proviene del griego skeptomai, investigar atentamente, o simplemente de skeptesthai, investigar. Señala Jesús Mosterín ([3]) que: "Si un individuo cree de hecho todas y sólo las ideas en que le resulta racional creer, o al menos está siempre dispuesto a modificar su sistema de creencias en tal sentido, diremos de él que es racional en sus creencias. Si cree más ideas que las que racionalmente puede creer, diremos que es un dogmático; si cree menos, un escéptico", en general todos tendemos a creer más de las que racionalmente deberíamos admitir.

Por otra parte, la lógica es la ciencia de pensar bien y saber extraer conclusiones de enunciados, verdaderos o falsos, llamados premisas. Para Aristóteles la lógica era la herramienta de la ciencia. La lógica no trata tanto de la verdad o falsedad de las premisas, sino del mecanismo de obtención de conclusiones. Si las conclusiónes se derivan correctamente de las premisas. Sin embargo, no todos los razonamientos pasan este estricto tamiz... y los llamamos "falacias", paradojas. Algunos se revelan como errores de razonamiento, otros resultan ser meras especulaciones, otros son de mala fe y llevan la intención de engañar o confundir. Algunos de estos razonamientos son conocidos desde la antigüedad y han sido ampliamente estudiados.

3.2.1.1.- El Escepticismo

El escepticismo es una corriente que con muy diferentes matices sostiene que la mente humana no es capaz de justificar afirmaciones verdaderas. Un escepticismo extremo o absoluto sostendría que no existe ningún enunciado objetivamente verdadero para la mente humana, o la imposibilidad total de justificar afirmaciones verdaderas; de este escepticismo se suele decir que se refuta a sí mismo o que es imposible, puesto que se niega en su propia afirmación. El escepticismo moderado o relativo sostiene que son pocos los enunciados objetivamente verdaderos, o bien establece dudas razonadas sobre la capacidad de la mente humana de poder conocer las cosas y, por lo mismo, la somete a

[3] .- Racionalidad y acción humana. Madrid, Alianza, 1978, p. 23.

examen. Este relativismo propugna una actitud crítica ante el dogmatismo. Históricamente, las afirmaciones de escepticismo moderado aparecen tanto en épocas de decadencia cultural o cansancio intelectual, como de renovación e Ilustración, y la historia misma de la filosofía occidental alterna épocas de escepticismo y dogmatismo. La duda metódica y el espíritu crítico o el rigor científico son manifestaciones prácticas de un escepticismo moderado.

Históricamente, una corriente de la filosofía helenística, el pirronismo, o escuela escéptica que nace con Pirrón de Elis (-360 a -272) y su discípulo Timón de Fliunte (-325/ -320 a 235/230), para quienes ni los sentidos ni la razón pueden suministrarnos un conocimiento verdadero, por lo que lo más sabio, si queremos llegar a la ataraxia, es permanecer indiferentes a todo absteniéndonos de hacer juicios; los estoicos llamaron a esta suspensión de juicios epokhé. Con Arcesilao (-315 ca. -240), considerado el fundador de la Academia nueva, entra el escepticismo en la Academia platónica; criticó la teoría del conocimiento de los estoicos, y excluyó del escepticismo el razonamiento moral: pese a desconocer dónde está la verdad, el sabio es capaz de actuar moralmente. Carneades (-219 a -128), uno de sus sucesores, desarrolló una teoría del conocimiento probable (píthanon, «lo digno de crédito»): su escepticismo está basado en la distinción que establece entre lo objetivamente verdadero, desconocido para el hombre, y lo subjetivamente verdadero. A partir del s. -II, el escepticismo tiende a convertirse en eclecticismo, pensamiento que invade tanto la Academia platónica como las restantes escuelas helenísticas, si bien en menor medida. Enesidemo de Cnossos (hacia al año -50) renueva el pirronismo antiguo y estudia sus «tropos», o lista de contraposiciones que fundamentan el escepticismo de la vida (Razonamientos pirrónicos). Hacia el s. II el escepticismo se funde con el empirismo médico. En esta corriente destaca Sexto Empírico (Alejandría, hacia la segunda mitad del s. II.), el autor más importante para el conocimiento del escepticismo antiguo, que lo entiende (Supuestos del escepticismo pirrónico) como el arte de enfrentar todas las contradicciones de las cosas y el pensamiento; el escéptico logra la ataraxia, o tranquilidad interior, renunciando a decidir sobre opiniones contradictorias. En general, la dificultad de resolver la cuestión epistemológica de la verdad y la falsedad se combinó, en el escepticismo antiguo, con la adopción de certezas de tipo práctico, que se fundamentaban en criterios éticos, estéticos, de utilidad, etc. En cambio, en el escepticismo renacentista se acentúa sobre todo el aspecto racional del problema, dejando de lado la actitud más vital que representaba el escepticismo griego. Montaigne (1533-1592), Charron (1541-1603) y Francisco Sánchez (1562-1632) son los escépticos destacados de esta época.

David Hume (1711-1776) integra el escepticismo en la misma actividad filosófica. Distingue (Investigación sobre el entendimiento humano, sec. XII) entre escepticismo «antecedente» y escepticismo «consecuente». El primero es «anterior a todo estudio y filosofía», y un ejemplo podría ser la duda metódica cartesiana, que plantea la búsqueda de un primer principio de certeza infalible; el segundo es «posterior a la ciencia y a la investigación». Mantener un escepticismo antecedente en forma exagerada -pirrónica- equivale a negar cualquier posibilidad de llegar a la certeza. El escepticismo consecuente es el que hay que adoptar después de haber sometido a examen nuestras posibilidades cognoscitivas. Este escepticismo pone de manifiesto la imposibilidad de conciliar lo que creemos por sentido común y lo que sostenemos tras un examen filosófico de muchas cuestiones: por sentido común creemos que lo que vemos es lo que existe, pero la razón filosófica rechaza identificar nuestras representaciones con los objetos que representan;

por otro lado, no disponemos de buenos argumentos para demostrar que nuestras percepciones o representaciones correspondan a los objetos reales. Al hombre razonable le es necesario un escepticismo mitigado o «académico», que es el resultado de combinar un severo examen crítico de nuestras capacidades cognoscitivas con el sentido común y la reflexión. Y así, hay que recordar que todos nuestros conocimientos se reducen a la relación de ideas, o lo que puede saberse por demostración, y a cuestiones de hecho, que fundamos en la relación de causa y efecto. Este escepticismo «académico» de Hume ha pasado a ser una de las posturas fundamentales de la filosofía neopositivista del s. XX, pero es también una característica de todos aquellos filósofos que, desde Kant, han tendido a someter a examen a la razón humana. Nietzsche llamó a los escépticos «los únicos filósofos honorables» (Ecce Homo).

3.2.1.2.- Falacias

Se suelen clasificar las falacias en cuatro grupos:

1) Falacia ad-hóminem.

Esta es la falacia mas habitual. Su fundamento es muy simple: atacar a quien sostiene una opinión, evitando argumentar contra ella. Si alguien emite un juicio y yo no estoy de acuerdo, la argumentación debiera girar en torno a dicho juicio, no en torno a la persona que la emite. (Por eso se llama "ad-hóminem", "contra el hombre"). Puedo (y debo) respetarte como persona e incluso como adversario, aunque no esté de acuerdo con tus argumentos.

a) Primera variante: "Descalificar"
Cuando un personaje usa un argumento "ad-hóminem" contra otro, se dice que "lo descalificó".
b) Segunda variante: "Autoridad moral"
Otra forma de argumentar "ad-hóminem" es poner en duda la "autoridad moral" de la otra persona. Nunca ha quedado claro qué es "autoridad moral" o "calidad moral", pero de todos modos se le menciona.
c) Tercera variante: "Intereses ocultos"
Las falacias pueden usarse no sólo para lanzar ataques personales contra un adversario, como en el caso del las falacias ad-hóminem, sino también como forma de defensa.

2) Falacias de distracción

El mecanismo de este segundo tipo de falacias es simple: se alega algo que no tiene relación directa con el tema que se discute, para distraer la atención y llevar la discusión a otro campo.

a) Primera variante: "Consecuencias adversas"

Este tipo de falacia es muy simple: se trata de crear miedo o "apanicar", presentando las consecuencias adversas que se podrían presentar, para con ello "convencer". Las "consecuencias adversas" nunca son demostradas, simplemente se les menciona para asustar.

b) Segunda variante: "Victimización"

Aquí se trata de despertar compasión, respeto, misericordia, etcétera (cualquier emoción) para impresionar a los demás. Es la inversa de una falacia ad-hóminem: se trata de involucrar a la persona que emite el argumento. Es uno de las falacias favoritas de los políticos, para manipular.

c) Tercera variante: "Populismo" .

La falacia consiste en desechar un argumento, simplemente porque no le gustaría a la mayoría. O decidir algo, no con razones, sino atendiendo a la popularidad.

d) Cuarta variante: "Señalar a otras personas".

El objetivo es hablar de otras personas y demostrar que ellas hacen lo mismo que nosotros, y sin embargo no son señaladas. En la fraseología nacional: "al fin que todos lo hacen". En términos bíblicos: "fijarse en la paja del ojo ajeno y no en la viga del propio".

e) Quinta variante: "Ocultar información".

El método es defender una postura, pero sin mencionar todos los elementos, "olvidando" cierta información comprometedora.

f) Sexta variante: "Dogma o argumento de fe".

El argumento favorito de los papás que no saben lo suficiente para responder las preguntas de los niños, o que no quieren hacerlo: "eres muy pequeño para entender" / "cuando crezcas entenderás" / "no lo entenderías". En el fondo, siempre se trata de lo mismo: considerar al interlocutor como una persona incapaz de razonar.

g) Séptima variante: "Argumento de autoridad" .

El argumento de autoridad es citar a alguien que supuestamente es un "experto" o "autoridad" en la materia. Sin embargo, el "experto" puede serlo o no. Incluso puede que tenga "autoridad" en otro campo, pero no en el que nos encontramos discutiendo; el prestigio en un campo no se pasa automáticamente a otro.

h) Octava variante: "Argumento cronológico" o "respeto a la tradición".

Se alega que algo es muy antiguo o que se viene haciendo desde hace mucho tiempo, apelando a la tradición o a la costumbre lo que supuestamente lo hace verdadero automáticamente. Lo cual es falso, pues la costumbre no nos dice nada de su verdad o falsedad.

i) Novena variante: “Somos especiales”.

Se presenta a una comunidad (incluso a un país) como “muy especial”, de tal modo que ninguna experiencia previa es válida para ese grupo, a veces ni la ley es aplicable. Es pariente cercano de la falacia tipo “Argumento de fe”.

j) Décima variante: "Critican, pero no aportan soluciones"

Este argumento sería válido si el que cuestiona algo tuviera la obligación de aportar soluciones. Pero no siempre es así, y en ese caso estamos frente a otra falacia de distracción.

3) Falacias de distorsión

Algunas falacias no pretenden atacar ni distraer, sino confundir, mediante la distorsión de una parte del razonamiento. A veces, se recurre a la distorsión por mala fe; a veces, por ignorancia. Las falacias de la distorsión deforman la tesis o sus consecuencias, para convencernos de una u otra postura.

a) Primera variante: “Falsa disyuntiva” o “falsa dicotomía”. Se conoce con el nombre de “falacia disyuntiva”.

Es pariente cercana de un tipo de falacia de distracción, la de consecuencias adversas. Aquí se trata de presentar dos o tres posibles alternativas, como si el universo de opciones se redujera solamente a ellas. Es la favorita de los dictadores y populistas. La fuerza de esta falacia es que existe un “o exclusivo” en el que si se acepta una de las opciones la otra es imposible. Por eso cuando se descubre esta falacia se suele defender con el siguiente argumento, fuera de contexto: “O estás embarazada, o no lo estás. No puedes estar medio embarazada”. Pero estar embarazada es una dicotomía verdadera, como los binomios hombre/mujer o vivo/muerto (no hay tercera opción). Pero la vida real es mucho más complicada que estos esquemas tan simples.

b) Segunda variante: “Falsa analogía”

A veces se recurre a analogías para ilustrar una tesis. Pero la analogía no siempre es válida. Un ejemplo de ello es lo siguiente siguiente: “O estás a la derecha (capitalismo) o estás a la izquierda (socialismo), en política no hay centros, es como una carretera: no puedes ir por en medio”… En primera, es un ejemplo de “falsa disyuntiva”, porque se olvida (o se ignora) que existen otras alternativas políticas, como la Social Democracia, Tercera Vía o la Democracia Cristiana. Además, es una “falsa analogía” porque la derecha/izquierda de una carretera no se parece en nada a la derecha/izquierda de la política.

c) Tercera variante: “Generalización”

Se argumenta falsamente que toda la realidad puede ser explicada a partir de un solo caso, o bien de una muestra no significativa.

d) Cuarta variante: “Exageración hasta la ridiculización”

El argumento que se quiere combatir es deformado hasta la ridiculización, con la idea de quitarle validez.

e) Quinta variante: “Lenguaje prejuiciado”

La idea es salpicar el discurso con palabras que conllevan cierta carga emotiva, que dicen una cosa pero sugieren otra: George Bush: “EE. UU. ha iniciado una cruzada contra los malhechores...”. La palabra “"cruzada" conlleva la idea de guerra religiosa, involucrando sentimientos muy profundos.

f) Sexta variante: “Maniqueísmo radical”

Se trata de atribuirse a sí mismo todo lo bueno, y de achacar al otro todo lo malo, sin tonalidades intermedias. Así mismo, se alude con elementos negativos contra el otro, lo que hace que nosotros aparezcamos como los receptores de los conceptos positivos. Así Bush dice: "Es la lucha del bien contra el mal"... parafraseando: nosotros somos los buenos y merecemos vivir; ustedes son los malos y merecen ser destruidos.

g) Séptima variante: “Deshumanizar”.

La idea es negarle al otro el estatuto de humano, o denigrarlo de tal forma que cualquier defensa sea insostenible. Abrumarlo con calificativos y epítetos hasta ahogarlo. Esto también se puede hacer contra instituciones. Lo usan también los dictadores y extremistas. Un ejemplo es decir que es un argumento aceptado por todo el mundo..., que hasta los niños lo entienden..., etc. Supone que el que no es partidario o lo acepta no es hombre, ...

h) Octava variante: “Pregunta maliciosa”. En términos comunes: “todo o nada”.

Una variante de la “falsa disyuntiva”. Se pide definir la postura propia ante un argumento (o un bloque de ellos)… pero resulta que es falso o lleva implícita una acusación.

4) Falacias de coherencia

Para que el razonamiento sea válido, la conclusión alcanzada debe desprenderse lógicamente de las premisas. Si hay una falla en esta conexión, se cae en un error de coherencia lógica.

a) Primera variante: "No distinguir entre casualidad y causalidad"

Si vemos un fenómeno A (una crisis, una quiebra, un terremoto, una devaluación, lo que sea), y luego otro fenómeno B (desempleo, hambruna, inflación, etc.) podemos pensar que A es la causa de B. Eso no es siempre tan evidente como quisiéramos. En el mundo de las ciencias físicas las causas son mucho más evidentes, pero en las ciencias sociales las relaciones no son tan sencillas, y los "expertos" pueden discutir sobre el "origen" o "causa" de algo durante años. Debemos analizar otras explicaciones: por ejemplo, que los acontecimientos simplemente sucedieron a la vez, o uno detrás de otro, pero no están relacionados entre sí. También es una falacia común querer ver relaciones donde no las hay.

b) Segunda variante: "Selección de casos".

En otras palabras: "Recordar los aciertos, ocultar los fallos".

c) Tercera variante: "Petición de principio".

La falacia es suponer que algo está demostrado o es cierto (cuando no lo es) o considerarlo "probable", aun cuando hay muchos indicios que apuntan a lo opuesto, y a partir de ahí razonar. Es decir: no se puede, desde un punto de vista lógico, asumir algo como cierto para luego pretender demostrarlo. Una variante de "petición de principio" es mentir abiertamente. Por ejemplo, dice Provida, a propósito del aborto: "En los umbrales del siglo XXI está plenamente comprobada la existencia de vida humana dentro del vientre materno, mucho antes del nacimiento. Partiendo de esta certeza, que no está sujeta a debate", etc.

d) Cuarta variante: "No hay otra explicación".

Es una variante de la "falsa disyuntiva". Si no se puede demostrar que algo es verdadero, se concluye que es falso. O viceversa: si no se puede demostrar la falsedad, se concluye que es verdadero. En ambos casos, se "olvidan" otras explicaciones posibles. Un caso típico: la gente atribuye a fantasmas cualquier ruido, sombra, etc., que se sale de lo común… simplemente porque no pueden encontrar otra explicación. Como decía Tácito: "Todo lo desconocido lo reputamos magnífico".

e) Quinta variante: "Ver al árbol y olvidarse del bosque".

Está muy relacionada con el tipo de falacia anterior. Aquí el error es fijar la atención en una muestra del universo y concentrar todas las energías en él, olvidándose de todo lo demás. Es muy común que se use esta falacia para defender intereses específicos.

3.2.1.2.- Las paradojas, Pitágoras y el pitagorismo

Un primer resultado paradójico, muy conocido en la historia del pensamiento matemático, fue aquel en que incurrieron los pitagóricos, considerados fundadores e inspiradores de todas las matemáticas griegas. Pero no es posible comprender su importancia teórica e histórica si no nos referimos primero, aunque sea de pasada, a Pitágoras y al pitagorismo.

Pitágoras es conocido, sobre todo, por el teorema que lleva su nombre. Pero se sabe que se trataba de un teorema que se conocía ya en siglos anteriores, en la Babilonia de Hammurabi y en el antiguo Egipto. Natural de Samos, una isla de la costa del Asia Menor situada ante Efeso, donde según la tradición nació en la segunda mitad del siglo -VI, Pitágoras se trasladó posteriormente a Crotona en la Magna Grecia, parece ser que debido a controversias políticas que surgieron con el tirano Polícrates que había instaurado un gobierno autoritario en la ciudad. En Crotona fundó una asociación de tipo no científico, sino ético-religioso, cuyos miembros, elegidos según criterios de moralidad y empeño intelectual, tenían que atenerse a severas normas. Tenían que respetar el sagrado silencio y reconocer la autoridad dogmática del pensamiento del propio Pitágoras; además, tenían que respetar ciertas normas prácticas, cuya finalidad era alcanzar la perfección ascética y la preparación a la vida más allá de la muerte. Es, por ejemplo, un hecho sabido el que la doctrina de la «metempsicosis», que etimológicamente significa «pasar de un espíritu a otro» es una doctrina pitagórica: según ella, el alma no muere con el individuo, sino que después de la muerte vive otras existencias materiales, corpóreas, trasladándose a otros organismos humanos o animales. Tiene lugar, en esta forma, una especie de justicia: los méritos y las culpas adquiridos durante la vida terrenal valorados en la mayor o menor libertad de las pasiones, se traducen en una nueva vida encarnada en seres más o menos elevados en la escala de los vivos. El alma que haya acumulado más méritos encarnará en otro hombre, mientras que la que no haya acumulado mérito alguno volverá a vivir encarnada en el cuerpo de algún repugnante animal.

Otro hecho confirma el carácter sectario del pitagorismo: los descubrimientos conseguidos por la escuela y las propias investigaciones tenían que mantenerse en secreto. La tradición ha permitido que llegaran hasta nosotros varias leyendas sobre las trágicas consecuencias sufridas por aquellos que se atrevieron a divulgar los conocimientos adquiridos.

El fundamento filosófico de la doctrina pitagórica reside en esta proposición: «el *número es la esencia de la realidad*». Los números no sólo son el principio inmanente de todas las cosas, sino también la sustancia y la materia de que ellas constan. Existe una relación entre el número, una entidad de carácter abstracto, y la materialidad de las cosas. En otras palabras, los números son puntos materiales, todo lo pequeños que se quiera, pero nunca de nulo tamaño, de los que se componen todos los cuerpos y todos los elementos. Los pitagóricos llegan a establecer una simbiosis entre matemáticas y realidad. Los números se dividen en dos clases: los pares y los impares; todo número dado no es si no la composición en parte de números pares y, en parte, de números impares. De esto deducían los pitagóricos que el impar y el par eran los elementos universales de los números y, por consiguiente, de todas las cosas del universo. Además, como identificaban a los impares con lo limitado y a los pares con lo ilimitado, en cuanto aquél impone un límite a la división por dos y éste no, afirmaban también que todo está formado de *limitado e ilimitado*. Identificaban también el impar con lo perfecto, mientras el limitado y el par se identificaban con lo imperfecto. Un comentarista posterior de la escuela pitagórica intenta explicarnos tal concepción: el impar es perfecto —dice— porque tiene «un centro de si-metría». Entre los números impares el más perfecto parece ser precisamente la tríada, ya que tiene «un principio, un centro y un final». En cambio el número par es imperfecto porque se divide en dos mitades iguales, por lo que ¡no tiene consistencia!

Todo está formado por elementos opuestos. Las oposiciones fundamentales, las que explican la realidad objetiva y subjetiva, estaban contenidas en el «10», número sagrado:

1) límite e ilimitado;
2) impares y pares;
3) unidad y pluralidad;
4) derecha e izquierda;
5) masculino y femenino;
6) en reposo y en movimiento;
7) recta y curva;
8) luz y oscuridad;
9) bien y mal;
10) cuadrado y rectángulo.

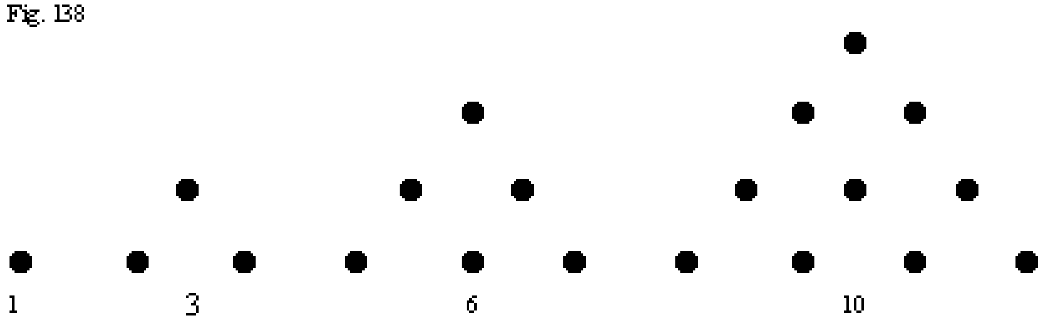
Puede parecemos raro que los pitagóricos consideraran al 10, un número par, como sagrado, pero, como dice Filolao, un seguidor del pitagorismo que vivió aproximadamente en el siglo -IV: «*la década es el fundamento de todo... principio de la vida divina, celeste y humana al mismo tiempo... sin ella todo es indeterminado, oscuro, cerrado...*». En efecto, la década contiene igual número de pares e impares: están la unidad y el primer número par; están el primer número impar y el primer cuadrado; además, es el fundamento de todos los números. No en vano el símbolo místico de los pitagóricos era la «tetráktys», dada por la serie de los primeros cuatro números cuya suma es precisamente 10 (1 +2+3+4= ¡10!).

Así como existen las oposiciones, debe existir igualmente algún elemento que una a las cosas entre sí. Este enlace lo proporciona la *armonía,* definida como «*unidad de la multiplicidad y concordancia de lo discordante*». Se puede entonces decir que todo es número y todo es armonía. En efecto, cada número es una combinación determinada, una armonía de pares e impares.

La representación geométrica de los números

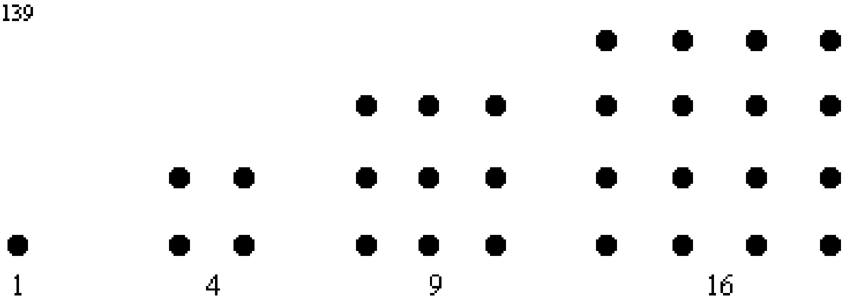
En el desarrollo posterior de su pensamiento, los pitagóricos ampliaron también la teoría de los números a la geometría: las figuras geométricas y las relaciones entre figuras —decían— están determinadas por números. Entre los resultados más interesantes en este sentido, los «números triangulares» constituyen una prueba de la íntima relación existente entre aritmética y geometría (figura 138). También parece ser de origen pitagórico el término «números cuadrados» (figura 139).

Fig. 138



Representación de los números triangulares según los pitagóricos

Fig. 139

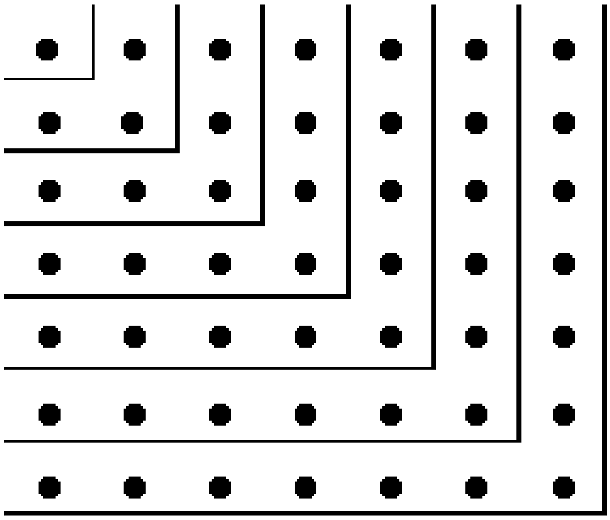


Representación de los números cuadrados según los pitagóricos

Se trata sin duda de representaciones mucho más antiguas que Pitágoras, como atestiguan algunas cerámicas que se remontan incluso al Neolítico; pero los pitagóricos supieron poner de relieve sus características aritméticas. También está relacionado con la representación geométrica de los números el empleo del abaco, instrumento de cálculo anterior también a los pitagóricos. Probablemente del abaco es de dónde deriva la norma de formar los cuadros como suma de los números impares sucesivos. Por ello se comprenderá también la importancia del *gnomon o nomón* (véase línea discontinua de la figura 140) como «generador de cuadrados». «Gnomon» deriva de una palabra griega que significa «indicador», «regla»...

Era tal el poder de los números, que en torno a ellos empezó a nacer un auténtico culto. El descubrimiento de que también la música podía traducirse a relaciones numéricas contribuyó decisivamente a crear alrededor de las matemáticas una atmósfera mística. Y a la música le atribuían los Pitagóricos la elevada función de purificar el alma: ¡la misma preparación ascética de los adeptos para la vida según la moral y la cultura pitagóricas se llevaba a cabo mediante la música!

Figura 140



Una trágica paradoja pitagórica: ¡el par es igual al impar!

Bajo esta concepción, aparentemente perfecta, se escondían, sin embargo, auténticas paradojas. Los números, decían los pitagóricos, podían ser interpretados como conjuntos de *puntos* (que ellos materializaban mediante piedrecillas, guijarros, etc.) cada uno con su propia posición. Las mismas figuras geométricas podían imaginarse como conjuntos finitos de puntos, situados como infinidad de granitos unos junto a otros. Y era esta peculiar naturaleza la que permitía expresar las relaciones entre las longitudes con números enteros. Por consiguiente, para los Pitagóricos sólo existían los números enteros.

Tomemos como ejemplo dos longitudes *A* y *B:* si admiten un submúltiplo C, es decir una longitud contenida un número entero *a*, de veces en *A* y un número entero *b* de veces en *B*, entonces la relación *A/B* de las dos longitudes puede expresarse mediante la relación entre números *a/b*.

Los pitagóricos, puesto que las figuras geométricas estaban constituidas por un número finito de puntos, no podían concebir longitudes que no fueran conmensurables: para ellos existía al menos una longitud submúltipla común, el punto «mónada», de la que están constituidas todas las longitudes. Podemos entonces comprender la sorpresa y la perplejidad que invadieron a esta escuela cuando se descubrieron longitudes inconmensurables entre si, es decir, longitudes cuya relación no podía expresarse por medio de números enteros. La ironía del destino hizo que fuera precisamente el teorema que lleva el nombre de Pitágoras el que hiciera tambalearse los cimientos de las «matemáticas universales» y provocara la crisis de la concepción del segmento como conjunto finito de puntos y, por consiguiente, expresable numéricamente.

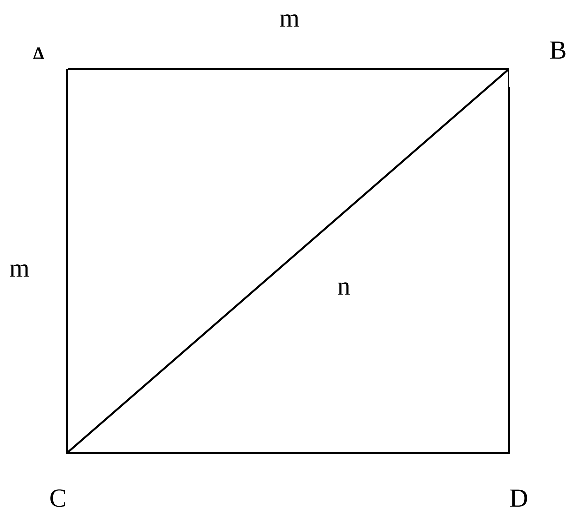


Figura 141.

Consideremos el cuadrado *ABCD* (figura 141). Supongamos que el lado *AB* esté formado por un número entero *m* de puntos y la diagonal por un número *n* de puntos. Según el propio teorema de Pitágoras se puede escribir:

$$2m^2 = n^2$$

Eliminemos en *m* y en *n* todos los factores primos comunes, de forma que la relación anterior se convierta en:

$$2r^2 = s^2$$

con *r* y s que no tienen otros divisores que ellos mismos y la unidad; en otras palabras, con *r* y *s* números primos.

Consideremos ahora la oposición fundamental del sistema pitagórico, el par y el impar; vemos que en

$$2r^2 = s^2$$

s^2 es par, ya que es igual a $2r^2$ que contiene el factor 2. Por consiguiente, s^2 *es* par, mientras que r^2 *es* impar, ya que es número primo con s^2.

Si s es par, entonces puede expresarse como *2/*, donde / es la mitad de *s;* simbólicamente, / = *s/2*. Entonces en la relación anterior puede sustituirse

$$2r^2 = 4\,/^2$$

y, mediante un procedimiento corriente de simplificación, obtener:

$$r^2 = 2l^2$$

Por consiguiente, r^2 es par, ya que es igual a $2l^2$ que contiene el factor 2. Es, evidentemente un absurdo, ya que r tendría que ser al mismo tiempo par e impar. Por consiguiente, la diagonal no es conmensurable con el lado del cuadrado y, si se la supone tal, se tiene que admitir que el número r, que mide el lado, sea al mismo tiempo par e impar. Una grave contradicción que atacaba los cimientos mismos de las matemáticas pitagóricas y sus pretensiones de explicación del universo. Era el primer ejemplo de un problema que no podía resolverse con los números: había por lo menos dos realidades, la diagonal y el lado, cuya relación no podía explicarse mediante números. Y pensar que estas dos realidades pertenecían precisamente a aquellas figuras geométricas que los pitagóricos consideraban idénticas a los números: la realidad no puede ser reducida a los números.

Números impensables

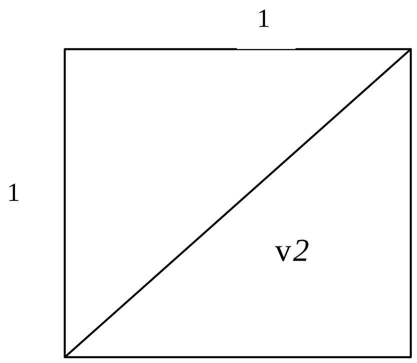
Uno de los méritos de los pitagóricos fue, sin duda alguna, el de haber introducido el concepto de *conmensurabilidad* y haberlo aplicado a la relación entre figuras. En términos menos precisos podemos traducir «conmensurabilidad» por «mensurabilidad», posibilidad de expresar alguna cosa por medio de números. Implícita en esta intuición se encuentra precisamente la idea o la confianza en poder describir la realidad mediante los números naturales. Pero nos parece oportuno insistir sobre el hecho de que, para los pitagóricos, las matemáticas no eran sólo un simple lenguaje, sino la esencia misma de las cosas. La descripción que ella daba de los objetos era su misma esencia. Resulta difícil captar el alcance de esta intuición, pero para intuir su valor bastará con pensar en que la revolución técnico-científica que ha dado lugar al mundo moderno sólo ha sido posible mediante la aplicación de las ramas más fuertes de las matemáticas a la realidad externa. El momento histórico en que comenzó este nuevo desarrollo fue el siglo XVII. Ya Galileo Galilei, que vivió a caballo entre el XVI y el XVII, vio claramente que las matemáticas y la geometría son los instrumentos más adecuados y eficaces para conocer la naturaleza: «La filosofía (=las ciencias naturales) está escrita en este enorme libro que siempre tenemos abierto ante los ojos (yo digo el universo), pero no se puede entender si previamente no se aprende a entender la lengua, y conocer los caracteres en que está escrito. Está escrito en lengua matemática y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin lo que resulta imposible humanamente entender palabras: sin ellos todo será un inútil vagabundeo por un oscuro laberinto...»

La descripción de la realidad objetiva mediante números se basa en el concepto elemental de medición, o «conmensurabilidad». Para que un segmento, o cualquier cosa, pudiera ser representado mediante números había que suponer que este segmento o el objeto considerado estuviera dotado de elementos que, en alguna forma, pudieran hacerse corresponder con los números. De aquí la idea del segmento como una entidad formada por un número finito de puntos similares a múltiples granitos. La concepción granular de la recta se basa precisamente en este principio: dada una recta, el número n finito de puntos que la componen, puede emplearse para indicar a la propia recta. Y así también, dados dos segmentos, es posible expresar la relación que existe entre sus longitudes mediante los números naturales. Supongamos que los dos segmentos sean iguales (figura 142), entonces su relación podrá expresarse mediante los números 1 y 1, en el sentido de que un segmento contiene el mismo número de puntos que el otro. Su relación se expresa así: 1 /1. Si el primer segmento contiene al segundo dos veces o tres, la relación se expresa mediante las parejas (2, 1) y (3, 1) para indicar que el primero tiene una longitud doble o triple que el segundo. Si, por el contrario, el primer segmento cabe dos o tres veces en el segundo, las parejas que expresan tal relación invierten el orden de los números (1, 2) y (1, 3). En el lenguaje matemático corrientemente empleado, expresamos tales relaciones de esta forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{a} \quad ; \quad \frac{a}{b} = \frac{3}{1} \quad ; \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{3}$$

Hasta ahora nos hemos referido a segmentos que eran los unos múltiplos de los otros. Pero si no nos encontramos en tales circunstancias, entonces para encontrar la pareja de números que expresa su relación bastará con dividir en partes iguales uno de los dos, hasta encontrar una parte contenida exactamente en el otro. Observemos la figura 143: los números que expresan las relaciones son 3 y 2 en el primer par, 4 y 5 en el segundo. En el primer caso es la mitad de *b* la que está contenida tres veces en a (o en otras palabras, la tercera parte de a está contenida dos veces en *b).* Este procedimiento debería resultar válido en todos los casos: basta dividir pacientemente uno de los segmentos en partes iguales hasta encontrar una parte, por muy pequeña que ésta sea, contenida en el otro. Y sobre este concepto se basa la conmensurabilidad, es decir, sobre la posibilidad de encontrar dos números enteros con los que expresar la relación. Si observamos cuidadosamente, también la medición de las magnitudes físicas sigue este procedimiento: en efecto, cuando decimos que una mesa de forma rectangular tiene una base de 175 cm, no hemos dicho si no confrontar dos segmentos, el correspondiente a la unidad y el dado por el lado del rectángulo correspondiente al lado de la mesa. Hemos establecido relación entre dos segmentos y hemos constatado que uno (1 cm) cabe 175 veces en el otro. Se trata de un razonamiento que utilizamos a diario, pero que conlleva toda una filosofía, toda una concepción de los números y de su función. Pero lo que distinguió a los pitagóricos de la concepción moderna de las matemáticas fue la convicción de la absoluta existencia objetiva de estos números: tal convicción era consecuencia directa de la concepción «granulare del segmento. Pero ya hemos visto que tras este razonamiento se escondía una terrible trampa que los mismos pitagóricos revelaron: ¡existen magnitudes inconmensurables entre sí, cuya relación no puede expresarse mediante números enteros! Un ejemplo lo tenemos en el lado del cuadrado y la diagonal: no es posible encontrar ningún número entero capaz de expresar tal relación. Si construimos un cuadrado cuyo lado sea la unidad de media de la longitud, es decir 1, entonces por el propio teorema de Pitágoras la diagonal será v*2,* que sabemos que es un número irracional, es decir, un número no expresable con ningún número racional (figura 144).

Figura 144



Los pitagóricos se habrían expresado exactamente así: «no existe ninguna parte del cuadrado contenida exactamente en la diagonal». Desde el colegio ya sabemos que, si queremos expresar esta medida, estamos obligados a recurrir a números que la representan por defecto o por exceso:

Valores por defecto:
1; 1,4; 1,41 ...

v*2*

Valores por exceso:
2; 1,5; 1,42....

Cuando en la solución de un problema matemático se llega a una contradicción (a pesar de un procedimiento correcto), entonces significa que está equivocada una de las premisas de las que se ha partido. El error que condujo a los pitagóricos a la contradicción era inherente a la concepción del segmento como «conjunto finito de puntos». Este fue el primer enfrentamiento con un concepto de gran profundidad: ¡el concepto de infinito!

El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables enfrentaba a los pensadores griegos con los nuevos conceptos del infinito y de su inverso, lo infinitesimal, que constituyen las bases del renacimiento de las matemáticas modernas. La evidencia de que, de alguna forma, habían alcanzado estos conceptos, aún sin profundizar en ellos, nos la proporciona Anaxágoras, que procedente de Asia llegó a la Atenas de Pericles en la segunda mitad del siglo V a. de C.: «Respecto a lo pequeño siempre hay un más pequeño (lo infinitesimal), pero también respecto a lo grande hay siempre un aún más grande (lo infinito).»

3.2.2.1.- Las aporias de zenon de elea

Zenón nació hacia entre el –490 y el -485 y murió en el –435, natural de Elea, ciudad de la Lucarna de la Magna Grecia, es uno de los discípulos más destacados de Parménides. Como éste fue también originariamente un pitagórico. Pero ante la crisis señalada anteriormente busco una explicación de la realidad más adecuada. Parménides, frente a la pluralidad y multiplicidad señalada por los pitagóricos, había afirmado que el ser, o más exactamente la esencia de las cosas, es único e indivisible. Entre sus seguidores se contó precisamente Zenón, que, al trasladarse a Atenas, supo defender con agudeza las doctrinas de su maestro, ante los filósofos de dicha ciudad, aduciendo cuatro argumentos contra el movimiento y varios argumentos contra la pluralidad de gran sutileza.

Zenón trató de demoler la hipótesis de la pluralidad, exponiendo las contradicciones implícitas en la noción de la unidad. Contra la pluralidad argumenta: "que nada tiene tamaño porque cada una de las pluralidades es una e igual a sí misma". Todo el argumento puede, en efecto, compendiarse brevemente con las palabras de G. E. L. Owen "La paradoja tiene dos miembros. El primero comenzaba arguyendo que las unidades en un conjunto no podían tener tamaño alguno: de lo contrario, tendrían partes y no serían unidades, sino conjuntos de unidades. El segundo comenzaba arguyendo que no puede haber nada que no tenga tamaño alguno; porque no puede existir una cosa que, añadida o sustraída de algo, no afecte al tamaño de la misma" ([4])..

Sus argumentos contra el movimiento, a diferencia de los dirigidos contra la pluralidad, eran solamente cuatro en su origen; cada uno de ellos los discute sucesivamente Aristóteles (aunque en una versión ligeramente mutilada) en Física Z 9 ([5]).

Las teorías del movimiento dependen ineludiblemente de las teorías de la naturaleza del espacio y del tiempo; y en la antigüedad se sostuvieron dos opiniones opuestas sobre ellos. O el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles, en cuyo caso el movimiento es continuo y uniforme, o se componen de mínimos indivisibles — ¥toma megšqh —, y entonces el movimiento es, como Lee adecuadamente dice, "cinematográfico" y consta de una sucesión de diminutos saltos. Hemos de ver que sus argumentos van dirigidos contra ambas teorías —los dos primeros contra la primera opinión y los dos últimos contra la segunda—. Los cuatro constituyen, en realidad, dos pares; y, para completar además su nitidez, el primer miembro de cada par pretende probar que el movimiento es imposible para un cuerpo solo —es decir, es absolutamente imposible—, mientras que el segundo aspira a demostrar que el movimiento es imposible para más de un cuerpo —es decir, es imposible relativamente—. Es de presumir, por último, que estos cuatro argumentos tuvieran su máxima validez y fuerza destructiva contra las concepciones pitagóricas, porque sólo éstos, a causa de su confusión de las unidades provistas de extensión espacial e indivisibles con los puntos de la geometría, podían ser inducidos por medio de la lógica a admitir, en un examen crucial, que sostenían simultáneamente las dos teorías contradictorias sobre el espacio y el tiempo.

[4] .- OWEN, G. E. L.: Proc. Ar. Soc., 1958, 201.

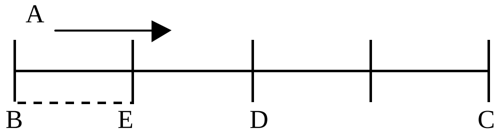
[5] .- Aristóteles, Fís. Z 9, 239 b 9 (DK29A25) ,

i) El estadio. ([6]).

Su primer argumento contra el movimiento se reduce simplemente a lo siguiente: "Es imposible atravesar el estadio, porque, antes de alcanzar el final, se debe alcanzar el punto que constituye la mitad del camino; y, antes de alcanzar éste, se debe alcanzar el punto que constituye su mitad; y así sucesivamente *ad infinitum*". La argumentación puede formularse en la forma siguiente: el movimiento no existe, ya que antes de llegar al final hay que alcanzar la mitad; pero antes de conseguir esto es preciso recorrer la mitad de la mitad; y aún antes de ello un octavo de la distancia y así sucesivamente hasta el infinito. En otras palabras, basándose en la suposición de que el espacio es infinitamente divisible y que, por tanto, cualquier distancia finita contiene un número infinito de puntos, es imposible alcanzar el final de una serie infinita en un tiempo finito.

Más esquemáticamente (véase figura 145), dado un punto móvil cualquiera, indicado con *A.* éste no podrá nunca recorrer la distancia desde el punto *B* al punto *C* porque antes tendrá que llegar a *D,* punto intermedio entre *B* y *C,* pero antes tendrá que llegar al punto *E,* intermedio entre *B* y *D,* y así sucesivamente hasta el infinito.

Fig. 145.



Para poner un ejemplo aún más concreto del razonamiento de Zenón, supongamos que un corredor de maratón *A* tenga que recorrer la distancia *BC,* sometida a un número infinito de subdivisiones, en un tiempo finito; ésta es, evidentemente, una suposición absurda porque ¡no es posible recorrer un espacio compuesto de elementos infinitos en un lapso de tiempo finito! Por consiguiente, el movimiento es imposible, aunque la experiencia común nos diga lo contrario.

ii) Aquiles y la tortuga. ([7]).

La segunda paradoja es también la más famosa bajo el nombre de «Aquiles y la tortuga»: en una carrera entre Aquiles y una tortuga, el rápido Aquiles no logrará nunca alcanzar a la lenta tortuga si ésta goza de una ventaja inicial; en efecto, mientras él recorre la distancia asignada, la tortuga habrá obtenido una nueva ventaja, creándose otra vez la situación de partida, y así hasta el infinito. Es indudablemente cierto que la distancia entre Aquiles y la tortuga irá disminuyendo cada vez más, pero ¡nunca quedará reducida a cero! Veamos este razonamiento con un poco más de detalle. Para ello identificaremos con una *A a* Aquiles y con una T a la tortuga. Supongamos ahora que A y T se desplacen a lo largo de una recta de movimiento uniforme: *T* tiene una velocidad que es, digamos, por aclararnos las ideas, 1 /10 de la de *A*. *A* parte con retraso respecto a *T*, en un espacio que, por comodidad, llamaremos *s*. Cuando *A* haya recorrido el tramo *s*, *T* habrá recorrido el tramo 1/10s; en el tiempo que *A* emplea para recorrer 1/10s, la tortuga *T* ha recorrido el tramo 1/100s. Mientras *A* recorre el tramo 1/100s, T recorre 1 /1000s y ¡así sucesivamente!

[6] .- Aristóteles, Fís. Z 9, 239 b 11. Aristóteles, Top. e 8, 160 b 7. Aristóteles, Fís. Z 2, 233 a 21.
[7] .- Aristóteles, Fís. Z 9, 239 b 14 5

En consecuencia —afirma Zenón—, «el corredor más lento tendrá que encontrarse siempre necesariamente un poco más adelantado». En otras palabras, *A* nunca alcanzará a *T,* pues permanecerá siempre rezagado respecto a éste en una fracción, por mínima que ésta sea.

iii) La flecha disparada. ([8]).

El tercer argumento es el de la «flecha»: La flecha ocupa siempre un espacio determinado y, como tal, está siempre quieta, en cualquier instante. Para poderse mover debería estar al mismo tiempo dentro y fuera de su espacio; pero una suma de estados no da movimiento. Por consiguiente |el movimiento es imposible!. Es fácil de ver que este argumento, a diferencia de los dos precedentes, considera al espacio y al tiempo como compuestos de mínimos indivisibles.

iv) Las filas en movimiento. ([9])

Este último, argumento es, con mucho, el más complicado de los cuatro y es virtualmente cierto que el mismo Aristóteles lo entendió mal, pues Zenón era demasiado perspicaz como para caer en el paralogismo del que éste le acusa. La clave de su verdadera significación está en su relación con los otros tres: la misma relación que hay entre el argumento de "Aquiles" y el del "estadio" existe entre este rompecabezas y el de la "flecha disparada". En otras palabras, este argumento se basa también en la creencia de que el espacio y el tiempo se componen de mínimos indivisibles.

La cuarta paradoja, la del «estadio», es también la más difícil de exponer. Por esta razón daremos de ella una versión muy simplificada. Indiquemos con A_1, A_2, A_3, A_4, unos cuerpos cualesquiera de igual dimensión y que estén inmóviles. Supongamos ahora que B_1, B_2 , B_3,, B_4, sean de la misma dimensión y se muevan hacia la derecha de forma que cada *B* supere a cada *A* en el mínimo intervalo posible. En la misma forma supongamos que C_1, C_2, C_3, C_4 sean cuerpos de iguales características a ca*da A y B y* que se muevan hacia la izquierda respecto a *A* de forma que cada C supere a cada *A* en el mínimo intervalo de tiempo. Imaginemos ahora que, en un determinado instante, las posiciones sean las de la figura 147. Pasado un instante, las posiciones serán las de la figura 148.

Figura 147

	A_1	A_2	A_3	A_4		
B_1	B_2	B_3	B_4			
		C_1	C_2	C_3	C_4	

Figura 148

A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	B_2	B_3	B_4
C_1	C_2	C_3	C_4

Diagrama de Alejandro, ap. Sinplicium. Fis. 1016, 14

[8] .- Aristóteles. Fís. Z 9, 239 b 30 .... (Cf. ibid. 239 b 5, donde el texto, sin embargo, está corrupto.)
[9] .- Aristóteles. Fís. Z 9, 239 b 33

Tanto *C* como *B se* han movido en el mismo instante y han ocupado las mismas posiciones, pero C_1, en este mismo lapso de tiempo, ha superado dos elementos de *B*. Por consiguiente existe una unidad más pequeña que el instante, la empleada por C_1 para superar un elemento de *B*. Y así sucesivamente, ¡en un proceso de subdivisión al infinito!

Significado teórico y solución de las paradojas de Zenón

Las paradojas de Zenón, sobre todo la de la dicotomía y la de Aquiles y la tortuga, se consideran hoy en día aclaradas por la moderna *teoría de los límites,* en los conceptos de *convergencia y divergencia de una sucesión* y al ser este límite de «convergencia» finito o, en el caso de las series divergentes, infinito. Sin embargo, la supuesta solución mediante la *teoría de los límites,* se basa en pensar que mientras para Zenón la suma de cantidades infinitas en número ¡limitado es infinita, por el contrario, puede ocurrir que, si las cantidades que se suceden son cada vez más pequeñas, el límite de su suma sea finito. Refiriéndonos más concretamente a la paradoja de Aquiles y la tortuga, suponiendo que la totalidad del recorrido sea igual a la unidad, los sucesivos tramos a recorrer serían en conjunto:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \ldots$$

El resultado de esta suma, aunque los elementos sean infinitos, es precisamente 1, es decir, el recorrido total. La sutileza consiste precisamente en superar las "aporías" introduciendo un supuesto, que es precisamente el que se trata de probar, por ello es una petición de principio.

3.2.3.- Las antinomias

Las antinomias serían dos proposiciones opuestas entre si, que son afirmadas por la razón con justificantes iguales o al menos que así lo parecen. En principio, las antinominas son razonamientos correctos que se concluyen de forma correcta y que llegan a conclusiones contradictorias. Kant es el primero que ha usado y aplicado al lenguaje filosófico la palabra antinomia.

3.2.3.1.- Las antinomias de la razon pura. Kant.

Cuatro son las que Kant denomina *antinomias* de la razón pura, con las cuales la Metafísica queda sacrificada al idealismo escéptico, aunque después se resuelvan las antinomias en la razón práctica. Cada antinomia se compone de una *tesis,* que expresa la exigencia ideal de la razón especulativa, y de una *antítesis, que* se opone a aquélla por medio de límites inherentes al conocimiento sensible. Son las antinomias para Kant consecuencia natural de una ilusión de la razón, que confunde las necesidades de nuestro pensamiento (razón pura o teórica) con las necesidades de las cosas (razón práctica). Kant divide sus cuatro antinomias, diciendo que dos se refieren a ideas matemáticas y dos a ideas dinámicas. Primera antinomia: ¿Es limitado el mundo en el espacio y en el tiempo? Sí, según la tesis, no, según la antítesis. Segunda antinomia: ¿Es el mundo divisible en partes simples o es divisible infinitamente? Ambas soluciones tienen razones en qué apoyarse. Para Kant, la solución de estas dos primeras antinomias se reduce a rechazar la tesis y la antítesis, cuya *falsedad parcial* procede de la objetividad que se atribuye al espacio y al tiempo, formas de la sensibilidad sujetiva y del pensamiento, según su doctrina. Las dos antinomias dinámicas son: Existe una libertad moral (tesis), sólo existe un determinismo físico (antítesis). Existe un ser necesario (tesis), no existen más que seres contingentes (antítesis); antinomias que proceden, según Kant, de los puntos de vista diferente, pero igualmente verdaderos, que toma el pensamiento y a que él refiere en su sistema la base fundamental para distinguir la razón especulativa de la práctica. Es la más importante de todas la antinomia establecida entre la libertad y el determinismo (que abraza todo el problema moral). Kant pretende resolverla, al restituir el valor de lo especulativo en la razón práctica como postulado o exigencias, mediante su distinción entre el *fenómeno,* o mundo fenomenal, sometido al tiempo y al espacio, y el mundo de los *noumenos.* Son los fenómenos para Kant símbolos, manifestaciones o indicios de nuestro carácter propio, de nuestro *yo,* realidad noumenal que es y subsiste por cima del tiempo y del espacio. En nuestra existencia fenomenal y sensible nos hallamos sujetos a leyes necesarias, a antecedentes que formados de móviles y motivos *determinan* nuestros actos. (V. Antecedente y la distinción que dejamos indicada entre el *cronológico* y el *lógico* o explicativo, que confundido por Kant le obligan a persistir en el dualismo insoluble de su antinomia); pero no basta, añade Kant, para concluir, que no somos libres mostrar que cada uno de los fenómenos de que se compone nuestra vida está determinado necesariamente por los que le preceden, sino que queda aún la vida entera considerada en su conjunto, el carácter moral, cuya expresión temporal está constituida por la serie de los actos visibles. Nuestro *yo inteligible,* en un acto *intemporal* quiere ser bueno o malo, y según esta elección, su vida temporal se reduce a manifestación de la bondad o de la maldad. Así somos libres en nuestra *realidad sobretemporal* (en nuestra *autonomía y poder* para comenzar el movimiento, que es como entiende Kant la libertad) y necesitados o determinados en la serie de nuestros actos temporales. Kant la funda en el sentimiento del deber; no resuelve, pues, el problema lógica ni psicológicamente, sino por medio de la moral, de la cual es un postulado la idea del deber, que es la única absoluta e inmediatamente cierta, categórica, siendo todo lo demás hipotético. Procedimiento semejante emplea para resolver la cuarta y última antinomia acerca de la existencia de Dios, que, según Kant, no se demuestra (pues para probar que es indemostrable refuta los argumentos de San Anselmo, Descartes y Leibniz, o sean los argumentos ontológicos de las causas finales y de las eficientes), sino que es objeto de creencia práctica, postulado de la razón. Lugar oportuno podrá hallarse donde apreciar en su justo valor la solución ideada por Kant a sus antinomias. Siguiendo la historia de esta palabra, la encontramos usada también por el Hegelianismo, que encuentra por todas partes contradicción y lucha, por Proudhon que la eleva a ley en sus estudios sociales (V. *Contradictions economiques),* y que pretenden resolver, Hegel señalando la tesis de la antinomia en el ser, la antítesis en el no ser y la solución en el suceder, y Proudhon, indicando la tesis y la antítesis de sus antinomias en lo que denomina absolutos relativos, y la solución es la serie o el processus, en el cual llega a decir: la humanidad se hace Dios o realiza lo absoluto. Pero las soluciones, algunas de ellas aparentemente justificadas, de las antinomias ideadas por Hegel y Proudhon, son hijas de una lamentable confusión de las ideas *contrarias* con las *contradictorias*.

Ley es de la realidad y a la vez de nuestro pensamiento la variedad, distinción u oposición (diferenciación, dicen al presente los naturalistas) de los objetos en su contenido y de las ideas en sus relaciones, y en tal sentido pueden señalarse antinomias, más aparantes que reales, en nuestro pensamiento y en la vida; que si el primero las olvidara, fecunda es la segunda en enseñanzas no menos elocuentes que duras para poner de relieve estas contrariedades reales y lógicas de la existencia y del entendimiento. Pero en la solución de estas antimonias bajo principio de unidad, *supuesto* por el idealismo escéptico de Kant, dogmáticamente *afirmado* por el idealismo absoluto de Hegel y todos los partidarios de la especulación *a priori,* concebido en forma de hipótesis o teoría por las escuelas científicas (evolución, monismo, etc., etc.) e informado en símbolos por todas las creencias religiosas; en la solución de estas antinomias, repetimos, está el alfa y la omega, el principio y fin de aquella tierra de promisión, tras la cual anhelosamente caminan especulación y experiencia, ciencia y filosofía a través de los constantes progresos de la cultura. Precisar taxativamente qué puntos de avance y de relativo retraso alcanza este empeño enciclopédico, en el cual se condensan los esfuerzos y exigencias del problema lógico y ontológico, o crítico y metafísico, es obra que debe cumplirse gradualmente en el examen que vamos haciendo de las distintas cuestiones que se ofrecen a nuestra consideración, obra que, si es menos brillante y seductora que la de acometer locamente la empresa de dar en fórmula directa o panacea la solución de todos los problemas, es más práctica y sobre todo más fecunda, pues la inteligencia humana, que no posee ciencia infusa, tiene siempre delante el espectáculo de la realidad, que no se adivina en llamarada genial, sino que se observa y se percibe por serie gradual, y sucesiva de esfuerzos reflexivos, llevados a cabo por la especulación y la experiencia.

3.2.3.2- Las antinomias: La antinomia de Russell.

3.2.3.2.1.- El conjunto: un concepto antinómico

Uno de los problemas fundamentales para las matemáticas ha sido y sigue siendo el de proporcionar una definición unívoca de sus conceptos.

En la segunda mitad del siglo pasado, el concepto básico de la nueva teoría de los conjuntos ocasionó buen número de preocupaciones a lógicos y matemáticos. Desde los primeros intentos, el concepto de conjunto resultó estar cargado de insidias lógicas y ambigüedades. Ya lo habían intuido así los antiguos griegos. Lo demuestra el *sofisma del "montón"*, con el que los sofistas de la antigua Atenas (siglo -V) se divertían embrollando todo razonamiento, complicando incluso todo aquello que, hasta entonces, había parecido sencillo y claro: «un granito no forma un montón, dos granitos no forman un montón, y tampoco lo forman tres granitos ni cuatro, ni cinco, etc. Y, sin embargo, ¡el montón está formado por varios granitos!...».

Todo el sofisma se basa en la imprecisión de conceptos como «montón» y «varios», semánticamente ligados con el concepto de conjunto. Fue el matemático Georg Cantor (1845-1918) el que, en algunos artículos publicados entre 1895 y 1897, intentó dar una definición de conjunto que resultara general y aceptable para todos: *Por conjunto se debe entender toda colección* M, *tomada en su totalidad, de objetos* m *definidos y separados por nuestra intuición y nuestro pensamiento. Estos objetos son los elementos de* m. En símbolos

$$M = \{m\}$$

A primera vista, parece una definición irreprochable, sencilla y meridianamente clara. ¡Pero no es así! En efecto, la aceptación de la definición anterior conduciría inevitablemente a la formación de antinomias, es decir de contradicciones entre los mismos principios, entre las propias leyes del pensamiento. Una de las más conocidas es, sin duda, la *antinomia de Russell.*

A comienzos del siglo XX, Gottieb Frege, basándose en los resultados conseguidos por Cantor, trató de dar una organización a las matemáticas, cuando, precisamente antes de la publicación de sus libros, recibió una carta de Bertrand Russell que hundió sobre su cabeza la monumental construcción que pacientemente había levantado con su mente. «Para un escritor científico —relata él mismo— poco puede resultar más desagradable que el hecho de que, tras haber terminado un trabajo, se le tambalee uno de los cimientos de su construcción. En tal situación me puso una carta del señor Bertrand Russell...» Se refiere a la famosa antinomia. Antes de adentrarnos en su examen formal, veamos algunas vulgarizaciones recientes.

3.2.3.2.2.- Un cartero y un barbero en apuros

En un imaginario pueblo existen dos extrañas normas: el único cartero contratado por la Administración Municipal tiene la misión de llevar el correo a aquellos que no lo retiren por sí mismos de Correos; de igual forma, el único barbero existente, por disposición explícita del mismo Ayuntamiento, tiene la misión de afeitar tan sólo a aquellos que no se afeiten por sí mismos.

«Tengo un problema —le dice un día el barbero al cartero que le está entregando la correspondencia— y no sé como resolverlo... Por disposición municipal yo puedo afeitar a aquellos habitantes que no se afeiten por sí mismos. Pero yo, ¿qué tengo que hacer? ¿A qué bando de los habitantes de este pueblo pertenezco? En efecto, si me afeito, entonces pertenezco al bando de los que se afeitan por sí mismos; pero, respetando la disposición municipal, no puedo afeitarme. En cambio, si no me afeito, entonces pertenezco al bando de los que no se afeitan por si mismos. Y entonces puedo afeitarme. Pero si me afeito... En resumen, ¡no sé qué hacer!».

«Mi situación no es mucho mejor —respondió el cartero—. Yo, según la disposición explícita del Ayuntamiento, tengo que llevarle las cartas sólo a aquellos que no van a la oficina de Correos a recogerlas. Y entonces, ¿qué hago con la correspondencia dirigida a mí mismo? Si soy yo mismo el que la retiro, se supone que formo parte de aquellos a quienes el correo no se lo entrega el cartero, es decir, se supone que yo no la recojo. Por otra parte, si no la retiro, se supone, entonces, que yo la tome. En resumen, ¿puedo o no puedo entregarme el correo?»

Se trata de dos ejemplos con referencias concretas (el barbero y el cartero) y como tales, fácilmente comprensibles y posibles de resolver en sus dificultades lógicas. Todo el razonamiento se convierte en un círculo vicioso (la contradicción) y parece no existir vía (lógica) de salida:

¡Si sí, entonces no; si no, entonces sí!

Sigamos ahora de cerca el razonamiento de Russell a un nivel más abstracto.

3.2.3.2.3.- La antinomia de Russell

En base a la definición de conjunto de Cantor (véase página 102) es posible concebir «un conjunto que comprende exactamente a todos los conjuntos que no se contienen a si mismos como elementos». Ejemplos de conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos son, por ejemplo, el conjunto de los hombres, que no es un hombre, y el conjunto de los árboles, que no es un árbol. Para expresarlo en términos más sencillos, diremos que hay conjuntos que no poseen las propiedades características de los elementos que contienen. Haciendo una referencia lingüística, el término «monosílabo» no es un monosílabo, ya que no contiene una sola sílaba. Pero en el lenguaje hay atributos que gozan de la misma propiedad que enuncian: el término «polisílabo» es, él mismo, polisílabo, es decir, formado por varias sílabas: ¡el término «español» es español! De igual forma existen conjuntos que se contienen a sí mismos como elementos: el conjunto de los conceptos abstractos es por sí mismo un concepto abstracto, o bien «el conjunto de todos los objetos que pueden describirse con trece palabras españolas» que tiene la propiedad de satisfacer él mismo la propiedad que lo define. En efecto, consta de trece palabras (¡cuéntelas el lector si así lo desea!).

El primer tipo de conjuntos, los que no se contienen a sí mismos como elementos, reciben el nombre de *normales;* mientras que los demás, los que se contienen a sí mismos como elementos, se denominan conjuntos *no-normales.*

Consideremos ahora este nuevo conjunto: «el conjunto de todos los conjuntos normales y sólo ellos» y lo indicaremos con el símbolo *N*. Llegados a este punto, se pueden formular dos hipótesis:

1) *N* es normal;
o bien:

2) *N* es no-normal.

1) Supongamos que *N* sea normal, es decir, que no se contenga a sí mismo como elemento. En consecuencia *N* pertenece al conjunto *N* de los conjuntos normales, porque *N*, por definición es el conjunto de *todos* los elementos normales. Pero si *N* pertenece a *N*, entonces *N* no es normal. ¡Una contradicción!

2) Supongamos, por otro lado, que *N* no sea normal; es decir, *N* se contiene a sí mismo como elemento. Pero, puesto que *N*, por definición, sólo contiene conjuntos normales, entonces no puede contenerse a sí mismo, como elemento, que no es normal.

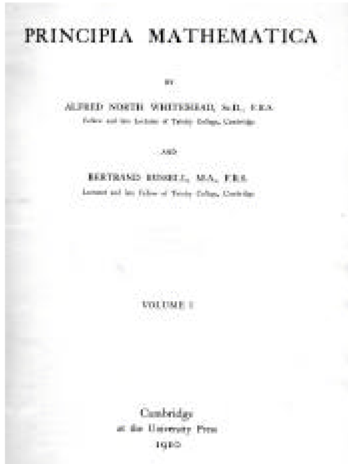
Y aún hay más: puesto que *N* pertenece a sí mismo como elemento, se deduce que *N* es normal.

En resumen: en tanto en cuanto *N* no es normal, entonces es normal. ¡Otra contradicción!

Esta paradoja, a la que en poco tiempo se unieron otras, ocupa un puesto fundamental en la historia de las matemáticas: tuvo la virtud de provocar la crisis de los propios cimientos sobre los que se trató, en los primeros decenios de nuestro siglo, de construir todo el aparato lógico y simbólico de las matemáticas. Fue una crisis positiva y fecunda, como se encargó de demostrar el posterior desarrollo de la investigación moderna en este campo.

3.2.4.- El teorema de Gödel.

B. Russell y Whitehead habían establecido en los Principia Mathematica[10] las condiciones para los sistemas matemáticos, con el objeto de poner los cimientos de las Matemáticas y de las ciencias.


PRINCIPIA MATHEMATICA
BY
ALFRED NORTH WHITEHEAD, Sc.D., F.R.S.
AND
BERTRAND RUSSELL, M.A., F.R.S.
VOLUME I
Cambridge
at the University Press
1910

El ideal consistía en que a partir de unos axiomas (supuestos indemostrables que damos por aceptados y que no se deducen de otros) podríamos deducir todos los teoremas o fórmulas de un sistema. Para ello un sistema axiomático era por tanto necesario cumplir, al menos tres condiciones: ser completo, decidible y consistente.

La completud se deriva prácticamente de la definición de “sistema axiomático”, pues consiste en que todas las formulas de un sistema puedan ser derivadas de los axiomas.

La decibilidad, consiste en un principio antimetafísico o anticircular que parece menos evidente la necesidad de su cumplimiento, pero que se entiende rápidamente que de no cumplirse queda abierta una puerta al incumplimiento de las otras dos condiciones y consiste en que pueda ser demostrado que una formula pertenece al sistema mediante un procedimiento finito.

La consistencia, consiste en el principio de no contradicción y puede ser formulado de la siguiente manera: no puede ser deducida una formula y su contraria en el sistema.

El teorema de Gödel dice que un sistema de axiomas A consistente que contenga los axiomas de la Aritmética en ciertas condiciones contiene una proposición verdadera que no es un teorema de A, más aún, el mismo enunciado de la consistencia de A no es un teorema de A. Y si por el contrario ese teorema es incorporado al sistema axiomático A, para que sea completo, entonces es inconsistente, es decir, se puede hallar una formula y su contraria dentro del sistema. La demostración primitiva se hace dentro del sistema de la Aritmética, pero ello no le resta valor.

[10] .- Para los escritos de B. Russell y distintos aspectos puede verse la página web: http://www.mcmaster.ca/russdocs/writings.htm

BIBLIOGRAFIA APARTADO 3.1.

VELARDE, Julian.: ***Lógica Formal***. Oviedo, Pentalfa, 1982.

MONTANER, Pedro /AMAU, Hilari.: ***Teoría y práctica de la lógica proposicional.*** Barcelona, Vicens-Vives, 1987.

BIBLIOGRAFIA APARTADO 3.2.

KIRK, G.S. /RAVEN, J.E.: The ***Presocratic Philosopphers***. 1966. ***Los filósofos presocráticos***. Madrid, Gredos, 1970, pp.400-416.

GARCÍA GUZMÁN, Sergio.: "Pensamiento escéptico y falacias lógicas (primera parte)", en
http://ghrendhel.tripod.com/filosofia.html

AGOSTINI, F.: ***Juegos de lógica y matemáticas***. Madrid, Piramide, 1985.

BIBLIOGRAFIA APARTADO El teorema de Gödel.

NAGEL, E.: ***El teorema de Gödel.*** Madrid, Tecnos, 1979.

<u>Estos apuntes están realizados sobe la bibliografía citada, dirigidos a los alumnos de Filosofía de 1º de bachillerato y tienen su origen en el curso 2003-04.</u>